Antiautomorphismes d'algèbres et objets reliés.

Anne Cortella

MÉMOIRE DES ACTIVITÉS DE RECHERCHE
EN VUE DE
L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

ANTIAUTOMORPHISMES D'ALGÈBRES

ET OBJETS RELIÉS

ANNE CORTELLA

Soutenance à Besançon le 4/06/2010

Membres du jury :

EVA BAYER-FLUCKIGER, Examinatrice, Professeur à l'Ecole Polytechnique de Lausanne.
PHILIPPE GILLE, Rapporteur et examinateur, Directeur de Recherches à l'Ecole Normale Supérieure de Paris.
DETLEV HOFFMANN, Rapporteur, Professeur à l'Université de Nottingham.
MAX-ALBERT KNUS, Rapporteur et examinateur, Professeur retraité de l'Institut Fédéral Suisse de Technologie (ETH) de Zurich.
DAVID LEWIS, Examinateur, Professeur à University College Dublin.
THONG NGUYEN QUANG DO, Examinateur, Professeur à l'Université de Franche-Comté.
PARIMALA , Examinatrice, Professeur à l'Université Emory, Atlanta.
JEAN-PIERRE TIGNOL, Examinateur, Professeur à l'Université Catholique de Louvain-La-Neuve.

Date: 31 mai 2010.

Table des matières

Introduction

Désignons par K un corps (commutatif) et par A une K-algèbre.

Définition 0.1. *On appelle* **antiautomorphisme** *de A tout automorphisme de groupes*

$$\sigma : A \to A$$

satisfaisant en outre

$$\forall a, b \in A \quad \sigma(ab) = \sigma(b)\sigma(a).$$

On appelle **involution** *de A tout antiautomorphisme σ de A qui est involutif, i.e tel que $\sigma^2 = \mathrm{Id}_A$.*

Un antiautomorphisme est dit **linéaire** *ou* **de première espèce** *s'il stabilise K et $\sigma_{|K} = \mathrm{Id}_K$, et* **de seconde espèce** *s'il stabilise K et $\sigma_{|K}$ est involutif et non trivial (donc est un automorphisme d'ordre 2 du corps K).*

Remarquons que toute involution qui stabilise K (en particulier toute involution sur une algèbre centrale simple) est de première ou de seconde espèce. Si un antiautomorphisme est de seconde espèce, alors l'ensemble des points fixes de l'involution $\sigma_{|K}$ est un sous-corps K_0 de K tel que K/K_0 est de degré 2.

Réciproquement si K/K_0 est une extension de corps de degré 1 ou 2, on dit que σ est un K/K_0-antiautomorphisme de A si $\sigma_{|K}$ engendre le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K/K_0)$.

Si A est une algèbre de matrices $M_n(K)$, alors la transposition est une involution de première espèce et, grâce au théorème de Skolem-Noether, les K/K_0-antiautomorphismes de première ou seconde espèce sont donnés par

$$\sigma(M) = H^{-1}\overline{M}^t H,$$

où H est une matrice inversible et $-$ engendre $\mathrm{Gal}(K/K_0)$.

De même, si A est l'algèbre des endomorphismes $A = \mathrm{End}(V)$ d'un K-espace vectoriel V, alors les antiautomorphismes de première et seconde espèce de A sont l'adjonction pour une forme sesquilinéaire non dégénérée (pour $-$, bilinéaire si $-$ est l'identité de K). Ces antiautomorphismes sont involutifs si et seulement si la matrice (la forme) utilisée est hermitienne.

Ainsi les antiautomorphismes d'algèbres sont une généralisation des formes sesquilinéaires ou bilinéaires.

Si les involutions sont très explorées dans la littérature, au moins sur les algèbres centrales simples (voir en particulier [KMRT]), les résultats dépendent complètement de l'espèce et du type de l'involution (symplectique, orthogonale ou hermitienne). Il est donc intéressant de développer une théorie plus générale pour les antiautomorphismes, tentant de généraliser les résultats connus sur les involutions et de développer de nouveaux outils s'appliquant en particulier aux involutions.

Ce mémoire est un recueil de résultats et de questions sur l'étude et la classification des antiautomorphismes d'algèbres, et s'attache plus particulièrement au cas linéaire sur des algèbres centrales simples, qui sont une généralisation des algèbres de matrices et pour lesquelles le théorème de Skolem-Noether est satisfait. L'étude du cas linéaire déployé, c'est-à-dire des formes bilinéaires, conduit par ailleurs à des considérations sur certains tores algébriques donnant un résultat très général sur la birationalité des groupes algébriques.

On commencera dans la partie 1 par une définition des structures à considérer, en particulier en 1.1 les groupes d'automorphismes d'algèbres à antiautomorphisme, et en 1.2 les formes sesquilinéaires sur une algèbre à antiautomorphisme. Certaines de ces formes sont particulièrement intéressantes : celles qui ont une asymétrie. C'est le cas en particulier pour les formes sesquilinéaires sur un corps, et donc les formes bilinéaires, pour lesquelles on énoncera des résultats obtenus avec J.P. Tignol [CT1] sur les endomorphismes qui sont des asymétries.

La multiplication par une forme sesquilinéaire admissible conduit en 1.3 à définir une équivalence de Morita entre algèbres à antiautomorphisme qui donne une équivalence de catégories pour les formes sesquilinéaires. On définit alors en 1.4 une somme orthogonale d'algèbres à antiautomorphisme Morita équivalentes avec asymétrie. Ces notions, développées dans un travail commun avec D. Lewis [CL], généralisent les notions développées pour les algèbres à involution respectivement par A. Fröhlich, A.M. McEvett [FME] et I. Dejaiffe [D].

Dans le cas des formes bilinéaires (sans symétrie), une classificassion a été obtenue par C. Riehm [R], grâce à un système d'invariants composé de formes bilinéaires symétriques ou antisymétriques et de formes hermitiennes, permettant à W.C. Waterhouse de prouver le principe de Hasse pour les formes bilinéaires [Wa]. Ce système d'invariants, rappelé brièvement en 2.1 , est néanmoins peu satisfaisant car difficilement disponible, nécessitant lui-même de nouveaux invariants, et non fonctoriel.

Néanmoins il montre l'importance de l'asymétrie, qui est généralisée aux antiautomorphismes linéaires d'algèbres centrales simples en 2.2. Cet invariant a été défini dans [CT1] avec J.P. Tignol. On considère ensuite, grâce à cette asymétrie, deux objets importants : en 2.3 une algèbre non centrale simple munie d'une involution , et en 2.4 une algèbre centrale simple munie d'une pseudo-involution, pour lesquelles les résultats classiques sur les involutions ne sont malheureusement pas applicables.

Les méthodes de Waterhouse ne se généralisant pas au Principe de Hasse pour les similitudes de formes bilinéaires (non symétriques), il convient pour ce faire d'utiliser les groupes associés et leur cohomologie galoisienne. Le paragraphe 3.1 explique comment de telles techniques permettent de redémontrer de manière plus conceptuelle le résultat de Waterhouse et de généraliser le principe de Hasse pour les similitudes de formes quadratiques, dû à Ono [On], aux formes hermitiennes.

Si le centralisateur de l'asymétrie d'une forme bilinéaire est une extension du corps de base, l'obstruction au principe de Hasse pour les similitudes de formes bilinéaires est le groupe de Tate-Chafarevitch d'un tore algébrique, de type "tore normique". Le calcul de cette obstruction, qui a été le corps de ma thèse, ainsi que l'élaboration d'un contre-exemple, sont expliqués en 3.2. Une interprétation galoisienne de ces calculs a été donnée avec G. Gras dans [CG].

La suite de la partie 3 est consacrée à des problèmes du même type que celui-ci : si T est le tore générique d'un groupe simple, on peut lui associer un groupe de Tate-Chafarevitch qui en est un invariant birationnel et qui s'annule dès que T est stablement rationnel. Les méthodes permettant de déterminer cet invariant dans le cas d'un tore "normique générique" sont très proches de celles utilisés en 3.1. Elles permettent de démontrer, en 3.3, une conjecture de LeBruyn sur la non stable-rationalité de ces tores.

Ceci est le cas partculier A_n d'un résultat plus général sur la non stable-rationalité de certains groupes algébriques simples, utilisant leur tore générique. Ce résultat est expliqué en 3.4 et 3.5. Les considérations de ces trois paragraphes sont issues d'une collaboration avec B. Kunyavskiĭ[CK].

La classification des formes quadratiques est entièrement effectuée à l'aide d'invariants cohomologiques, dont ceux de degré 0,1 ou 2 sont le rang, le discriminant et l'invariant de Hasse : c'est une conséquence de la conjecture de Milnor, démontrée grâce aux travaux de Voevodskiĭ, par Orlov, Vishik et Voevodskiĭ(voir [Vi] et [OVV]), et des travaux de Arason et Elman [AE]. Certains invariants sont généralisés aux involutions orthogonales d'algèbres centrales simples : le discriminant et l'algèbre de Clifford (qui n'est malheureusement pas un invariant cohomologique, cf [Q2]) définis initialement par descente galoisienne par Jacobson [J], puis directement respectivement par Knus, Parimala et Sridharan [KPS] et par Tits [T].

Dans la partie 4, une généralisation de ces deux invariants aux antiautomorphismes d'algèbres centrales simples est donnée en 4.1 et 4.2. On définit par ailleurs en 4.3 la forme trace d'une algèbre centrale simple à antiautomorphisme, qui ne permet malheureusement pas pour l'instant de trouver des signatures ni de calculer le discriminant. On explique ensuite quels résultats de classification peuvent être espérés en petite dimension cohomologique en 4.4, puis en petit degré en 4.5.

1. Antiautomorphismes d'algèbres et formes sesquilinéaires

1.1. Isomorphismes et automorphismes.

Définition 1.1.
Soient (A, σ) et (A', σ') deux algèbres munies d'antiautomorphismes. Un isomorphisme de (A, σ) sur (A', σ') est un isomorphisme d'algèbres $\phi : A \to A'$ tel que $\sigma' \circ \phi = \phi \circ \sigma$.

Nous cherchons alors à déterminer les classes d'isomorphie d'algèbres centrales simples à antiautomorphisme de première ou seconde espèce, ou tout au moins certains de leurs invariants. Remarquons que si deux telles algèbres à antiautomorphisme sont isomorphes, alors les antiautomorphismes sont de même espèce, et plus précisément ont même restriction au centre de l'algèbre, c'est-à-dire au corps de base K. On dit que des antiautomorphismes ayant même restriction au corps de base sont *compatibles.*

On note $\mathrm{Aut}_K(A, \sigma)$ le groupe des automorphismes de (A, σ).

Supposons A centrale simple. Si ϕ est un automorphisme de A, alors d'après le théorème de Skolem-Noether, il existe $u \in A^\times$ (défini à un facteur multiplicatif près) tel que $\phi = \mathrm{Int}\, u$. On constate que $\phi \in \mathrm{Aut}_K(A, \sigma)$ si et seulement si $\sigma(u)u \in K^\star$, i.e. u est dans le groupe $\mathrm{GU}(A, \sigma)$ des similitudes pour σ, et ainsi

$$\mathrm{Aut}(A, \sigma) \simeq \mathrm{PGU}(A, \sigma),$$

c'est-à-dire le groupe des similitudes projectives pour σ.

En particulier, si $A = M_n(K)$, notons $- = \sigma_{|K}$. Soit alors $H \in \mathrm{GL}_n(K)$ telle que pour tout $M \in M_n(K)$, $\sigma(M) = H^{-1}\overline{M}^t H$, c'est-à-dire σ est l'adjonction pour la forme sesquilinéaire de matrice H dans la base canonique. Alors $\mathrm{Aut}(A, \sigma) = \mathrm{PGU}(n, H)$ est le groupe des similitudes projectives pour la forme sesquilinéaire de matrice H.

Nous noterons également $\mathrm{U}(A, \sigma) = \{u \in A^\times,\ \sigma(u)u = 1\}$ le groupe unitaire de σ et $\mathrm{MS}(A, \sigma) = \{\sigma(u)u,\ u \in \mathrm{GU}(\sigma)\}$ le groupe des facteurs de similitude de σ. Le morphisme qui à la similitude u associe son facteur $\sigma(u)u$ conduit à une suite exacte courte de groupes algébriques

$$1 \longrightarrow \mathrm{U}(A, \sigma) \longrightarrow \mathrm{GU}(A, \sigma) \longrightarrow \mathrm{MS}(A, \sigma) \longrightarrow 1.$$

1.2. Formes sesquilinéaires asymétriques.

Soit A une K-algèbre munie d'un antiautomorphisme $-$, soit $\sim$ son antiautomorphisme réciproque, et soit P un A-module à droite. On note $P^\star = \mathrm{Hom}_A(P, A)$ qui est naturellement un A-module à gauche. Si M est un A-module à gauche on note $\overline{M}$ le A-module à droite isomorphe comme groupe abélien à M muni de l'action de A tordue par $\sim$:

$$\forall a \in A \quad \forall m \in M \quad \overline{m}.\overline{a} = \overline{am}.$$

Une forme $(A, -)$ sesquilinéaire sur P est une application $h : P \times P \to A$ satisfaisant

$$\forall a, a' \in A \quad \forall p, p' \in M \quad h(pa, p'a') = \overline{a}h(p, p')a'.$$

Nous remarquons avec D. Lewis dans [CL] qu'une telle forme correspond à un morphisme de A-modules à droite $H : P \to \widetilde{P^\star}$, ou un morphisme de A-modules à gauche $\overline{H} : \overline{P} \to P^\star$. On dit alors que la forme est non dégénérée (à gauche) si H (ou $\overline{H}$) est un isomorphisme.

On note $\mathbf{Sesq}(A, -)$ la catégorie dont les objets sont les formes $(A, -)$-sesquilinéaires et les morphismes sont les isomorphismes entre formes sesquilinéaires.

Nous définissons alors de manière très générale un invariant de la classe de similitude d'une forme sesquilinéaire : son *asymétrie*.

Définition 1.2 ([CL], def 2.1)**.**
Soit $(A,-)$ *une* K*-algèbre munie d'un antiautomorphisme* $-$, P *un* A*-module à droite,* $\sim$ *l'antiautomorphisme réciproque de* $-$. *Soit* $h : P\times P \to A$ *une forme* $(A,-)$ *sesquilinéaire. Une application*

$$\alpha \ : P \to P$$

est une asymétrie pour h *si :*

(a) L'application induite $\boldsymbol{\alpha} : \overline{P} \to \widetilde{P}$; $\overline{x} \mapsto \widetilde{\alpha(x)}$ *est un isomorphisme de* A*-modules.*
(b) $\forall x, y \in P \quad h(y,x) = (h(x,\alpha(y)))^{\sim}$, *ce qui équivaut à* $\overline{h(y,x)} = h(x,\alpha(y))$.

Notons qu'une telle asymétrie existe et est unique dès que la forme h est non dégénérée à gauche et à droite, ce qui est le cas en particulier sur une algèbre centrale simple A dès que h est non dégénérée à gauche. En particulier si $A = K$, si $-$ est involutive sur K, et $V = M$ est un K-espace vectoriel, alors l'asymétrie de la forme sesquilinéaire h de matrice H est $\alpha_h = H^{-1}\overline{H^t}$.

Cette notion généralise la notion d'asymétrie d'une forme bilinéaire, définie initialement par Williamson [Wi], utilisée par C.Riehm pour sa classification des formes bilinéaires [R] (qui sera expliquée en 2.1), et étudiée dans un travail avec J.-P. Tignol [CT1]. Dans cet article nous caractérisons les asymétries de formes bilinéaires sur un K-espace vectoriel V de dimension finie :

Théorème 1.3 ([CT1], th 1)**.** *Soit* $a \in \mathrm{GL}(V)$. *Posons pour* $m \in \mathbb{N}$ *et* $\varepsilon = \pm 1$,

$$V_m^{\varepsilon} = \frac{\ker(a-\varepsilon\,\mathrm{Id}_V)^m}{\ker(a-\varepsilon\,\mathrm{Id}_V)^{m-1} + (a-\varepsilon\,\mathrm{Id}_V)\big(\ker(a-\varepsilon\,\mathrm{Id}_V)^{m+1}\big)}.$$

Supposons $\mathrm{car}\, F \neq 2$. *Alors* a *est l'asymétrie d'une forme bilinéaire non dégénérée sur* V *si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées :*
1) a *et* a^{-1} *sont conjugués dans* $\mathrm{GL}(V)$ *;*
2) pour tout entier m *pair,* $\dim V_m^{+1}$ *est paire ;*
3) pour tout entier m *impair,* $\dim V_m^{-1}$ *est paire.*
Si $\mathrm{car}\, F = 2$, *alors* a *est l'asymétrie d'une forme bilinéaire non dégénérée sur* V *si et seulement si les conditions 1 et 2 sont remplies.*

Aucune généralisation de cet énoncé n'existe à ma connaissance dans le cas des formes $(K,-)$-sesquilinéaires non dégénérées sur un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'un automorphisme $-$ involutif, même si ce type de résultat paraît accessible.

Remarquons que D. Lewis a par la suite donné une autre carctérisation des asymétries ([L1] prop. 2) : $a \in \mathrm{GL}_n(K)$ est une asymétrie si et seulement si c'est un commutateur $a = [u,v] = u^{-1}v^{-1}uv$ de deux matrices symétriques.

Un autre invariant, lié à l'asymétrie, de la classe de similitude d'une forme sesquilinéaire est particulièrement utile dans ce qui suit et est introduit dans [CT1] (prop. 3) pour le cas bilinéaire. La généralisation suivante ne pose pas de problème :

Proposition 1.4.
Soit $-$ *une involution sur un corps* K *et* V *un* K*-espace vectoriel de dimension finie,* h *une forme* $(K,-)$*-sesquilinéaire non dégénérée sur* V. *Alors il existe une unique application* $(K,-)$*-semilinéaire* $\gamma_h : \mathrm{End}_K V \to \mathrm{End}_K V$ *telle que*

$$\forall x,y \in V \quad \forall f \in \mathrm{End}_K V \quad \overline{h(x,f(y))} = h(y,\gamma_h(f)(x)).$$

Cette application est involutive, ne dépend que de la classe de similitude de h *et satisfait :*

1) l'asymétrie de h est $\alpha_h = \gamma_h(\mathrm{Id}_V)$;

2) si $e, f, g \in \mathrm{End}\, V$, alors $\gamma_h(efg) = \sigma_h(g)\gamma_h(f)\sigma_h^{-1}(e)$, où σ_h est l'adjonction pour la forme h.

Ainsi les invariants de la classe d'isomorphie de la "pseudo-involution" γ_h sur l'algèbre centrale simple $\mathrm{End}\, V$ sont des invariants de l'antiautomorphisme de première ou seconde espèce σ_h sur $\mathrm{End}\, V$.

1.3. **Théorie de Morita sesquilinéaire.**
Avec D. Lewis, nous définissons dans [CL] le produit d'une forme sesquilinéaire par une forme admissible, notion généralisant le produit des formes hermitiennes.

Soient $(A, -)$ et $(B, -)$ deux algèbres munies d'antiautomorphismes $-$, d'antiautomorphismes réciproques notés $\sim$. Soit P un B-A-bimodule. On note $\overline{P}$ le A-B-bimodule isomorphe à P en tant que groupe et muni de l'action de A et B tordue par $\sim$.

Définition 1.5 ([CL], def. 1.8)**.** *On dit que la forme $(A, -)$-sesquilinéaire h sur P admet $(B, -)$ si*

$$\forall x, y \in P \quad \forall b \in B \quad h(bx, y) = h(x, \bar{b}y),$$

ou encore si l'application associée $\overline{H}$ est un morphisme de A-B-bimodules $\overline{H} : \overline{P} \to P^\star$.

Proposition 1.6 ([CL], def. 1.11 et prop. 1.12)**.** *Soit P un A-module à droite fidèlement projectif, $B = \mathrm{End}_A(P)$, et $h : P \times P \to A$ une forme $(A, -)$-sesquilinéaire non dégénérée qui admet $(B, -)$.*

Soit (M, k) un B-module muni d'une forme $(B, -)$-sesquilinéaire. Soit $hk : M \otimes_B P \times M \otimes_B P \to A$ la forme définie par

$$\forall m, m' \in M \quad \forall x, x' \in P \quad hk(m \otimes x, m' \otimes x') = h(x, k(m, m')x').$$

Alors hk est une forme $(A, -)$-sesquilinéaire sur le A-module à droite $M \otimes_B P$. Si M est projectif de type fini sur B, alors hk est non dégénérée si et seulement si k est non dégénérée.

De tels produits nous permettent de définir une théorie de Morita pour les formes sesquilinéaires, généralisant la théorie de Morita pour les formes hermitiennes développée initialement par A.Fröhlich and A. McEvett [FME] et C.T.C. Wall [W] (voir aussi [Kn] ou[D]).

Définition 1.7 ([CL], def. 1.15)**.** *On appelle donnée d'équivalence de Morita pour les formes sesquilinéaires toute famille*

$$((A, -), (B, -), P, Q, f, g, \overline{H}_Q)$$

où $(A, -)$ et $(B, -)$ sont des algèbres à antiautomorphisme, (A, B, P, Q, f, g) est une donnée d'équivalence de Morita classique et $\overline{H}_Q : \overline{P} \to Q$ est un isomorphisme de B-A-bimodules.

Deux algèbres à antiautomorphisme $(A, -)$ et $(B, -)$ sont dites Morita équivalentes si une donnée d'équivalence de Morita $((A, -), (B, -), P, Q, f, g, \overline{H}_Q)$ existe.

Remarquons qu'avec une telle donnée, alors par la théorie classique de Morita (cf [B]), P est fidèlement projectif, $Q \simeq P^\star$ et donc $\overline{H}_Q$ donne un isomorphisme $\overline{H} : \overline{P} \to P^\star$, qui induit une forme $(A, -)$-sesquilinéaire non dégénérée h sur P qui admet $(B, -)$.
Le produit par cette forme définit alors une équivalence de catégories :

Théorème 1.8 ([CL], th. 1.16)**.**
Soit $((A,-),(B,-),P,Q,f,g,\overline{H}_Q)$ *une donnée d'équivalence de Morita sesquilinéaire, h la forme $(A,-)$-sesquilinéaire sur P induite par $\overline{H}_Q$. Alors le foncteur*

$$\mathcal{F} \ : \ \mathbf{Sesq}(B,-) \to \mathbf{Sesq}(A,-)$$

défini par $\mathcal{F}(M,k) = (M \otimes_B P, hk)$ et $\mathcal{F}(u) = u \otimes \mathrm{Id}_P$ est une équivalence de catégories qui préserve les sommes orthogonales ainsi que la non dégénérescence des formes sesquilinéaires sur les modules projectifs de type fini.

1.4. **Somme orthogonale d'algèbres à antiautomorphisme.**

Grâce à cette théorie de Morita, on peut généraliser la somme orthogonale de formes $(K,-)$-sesquilinéaires (pour un automorphisme de corps $-$ sur K) en une somme orthogonale d'algèbres à antiautomorphisme. Cette définition généralise également la notion de somme orthogonales d'algèbres centrales simples à involution Brauer équivalentes (donc Morita équivalentes) donnée par I. Dejaiffe [D].

Définition 1.9 ([CL], def. 2.13)**.** *Soient $(A,-)$ et $(B,-)$ deux algèbres à antiautomorphisme. Supposons qu'il existe une donnée d'équivalence de Morita sesquilinéaire*

$$((A,-),(B,-),P,P^\star,f,g,\overline{H})$$

telle que la forme sesquilinéaire h correspondant à $\overline{H}$ ait une asymétrie α telle que

$$\boldsymbol{\alpha} \ : \ \overline{P} \to \widetilde{P} \ ; \ \overline{x} \mapsto \widetilde{\alpha(x)}$$

est un isomorphisme de A-B-bimodules.

La somme orthogonale de $(A,-)$ et $(B,-)$ pour h est l'algèbre à antiautomorphisme

$$(A,-) \perp_h (B,-) = \left(\begin{pmatrix} B & P \\ P^\star & A \end{pmatrix}, - \right)$$

où la multiplication est naturellement donnée par f et g, et sur laquelle l'antiautomorphisme $-$ est défini par

$$\overline{\begin{pmatrix} b & x \\ q & a \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{b} & \overline{\boldsymbol{\alpha}(q)} \\ \overline{H}(\overline{x}) & \overline{a} \end{pmatrix}.$$

Cette somme orthogonale dépend malheureusement du choix de h comme dans le cas hermitien. Elle est associative.

Dans le cas particulier des algèbres centrales simples, toute donnée d'équivalence de Morita est à asymétrie, et l'on peut ainsi effectuer la somme orthogonale de tout couple d'algèbres Brauer équivalentes munies d'antiautomorphismes compatibles.

Certaines questions sur cette somme sont en suspens : par quel type d'algèbres à antiautomorphismes peut-on simplifier une somme ? Plus précisément, il faudrait trouver une notion d'algèbre à antiautomorphisme hyperbolique, et montrer éventuellement qu'il y a, comme dans le cas hermitien, simplification par les hyperboliques.

Les liens sont par ailleurs à découvrir entre la somme et le produit tensoriel.

Une telle définition devrait faciliter le calcul d'éventuels invariants : dans le cas hermitien central simple, I. Dejaiffe [D] donne l'expression de l'algèbre de Clifford de la somme orthogonale comme un certain produit croisé d'algèbres de Clifford.

On espère pouvoir utiliser une telle somme orthogonale comme cela est fait dans le cas des involutions pour obtenir une généralisation des travaux de Lewis et Tignol sur la classification en petite dimension cohomologique [LT2].

2. Asymétrie et involutions associées aux anti-automorphismes linéaires

2.1. Le cas des formes bilinéaires : classification de Riehm.

Supposons car $K \neq 2$.

Dans [R], C. Riehm définit, en utilisant l'asymétrie, un système complet d'invariants d'une forme bilinéaire sur un K-espace vectoriel V construit comme suit (voir aussi [C3]).

Soit $b : V \times V \to K$ bilinéaire non dégénérée, B l'application linéaire de V dans son dual $V^\star$ correspondante, $a = B^{-1}B^t$ son asymétrie, M le $K[X, X^{-1}]$-module isomorphe à V sur K et où l'action de X est donnée par a. Notons encore R l'anneau principal $K[X, X^{-1}]$ et $E = \mathrm{Frac}(R)/R$. Alors M est un module de torsion de type fini sur l'anneau principal R dont le dual de Pontriyagin est $M^\vee = \mathrm{Hom}_R(M, E)$.

Soit $T : E \to K$ l'application K-linéaire qui, à un élément de E mis sous la forme q/f où f est un polynôme en X de degré $2d$ vérifiant $f^J = f(1/X) = X^{-2}f$ et q est un polynôme de degré $\leq 2d$, associe le terme constant $T(q/f)$ de q. Cette application induit l'application K-linéaire transposée $T^t : M^\vee \to V^\star$.

Munissons $R = K[X, X^{-1}]$ de l'involution linéaire J qui envoie X sur X^{-1}. On associe alors à b la forme $(-X)$-hermitienne ((R, J)-sesquilinéaire) $h : M \times M \to E$ correspondant à l'application linéaire $H : M \to M^\vee$ définie par $B = T^tH$ (et qui détermine B). Une telle forme $(-X)$-hermitienne est entièrement déterminée par les formes correspondantes sur les éléments de la décomposition de M en modules P-primaires (qui sont orthogonaux entre eux).

De plus si le polynôme premier P vérifie $P^JR = PR$ et J non triviale sur R/PR , et si l'on note :

$$M_P(r) = \{m \in M_P \mid P^r m = 0\} \quad \text{et} \quad V_P(r) = M_P(r)/[M_P(r-1) + PM_P(r+1)]\,,$$

la forme sur M_P définit des formes $(-X)$-hermitiennes $V_P(r) \times V_P(r) \to P^{-r}R/P^{-r+1}R$, donc en choisissant des éléments w_r bases de $P^{-r}R/P^{-r+1}R$ sur l'extension $L = R/PR$ finie du corps K, les formes coordonnées sont des formes $(-Xx_r)$-hermitiennes à valeurs dans L , où x_r vérifie $w_r^J = x_r w_r$. Alors en remplaçant w_r par une nouvelle base $y_r w_r$ avec $y_r^J y_r^{-1} = (-Xx_r)^{-1}$, les formes coordonnées sont hermitiennes : $V_P(r) \times V_P(r) \to L$.

Si $P^JR = PR$ et J est triviale sur $L = R/PR$ (i.e. si $P = X \pm 1$), on obtient ainsi des formes bilinéaires symétriques ou alternées. Si $P' = P^JR \neq PR$, alors le K-espace vectoriel V_P associé à la partie P-primaire M_P, muni de la restriction de l'asymétrie $a_{|V_P}$ est un invariant de b.

On a ainsi obtenu un système complet d'invariants de la forme bilinéaire b, qui se généralise aux formes sesquilinéaires sur un anneau simple muni d'un antiautomorphisme [RSF].

En utilisant ce système d'invariants et le principe de Hasse pour l'isomorphie de formes quadratiques, alternées ou hermitiennes, Waterhouse démontre le principe de Hasse pour l'isomorphie de formes bilinéaires sur un corps de nombres [Wa].

Si ces invariants montrent l'importance de l'asymétrie pour la classification des formes bilinéaires ou sesquilinéaires, et peuvent être obtenus directement de manière explicite, ils ont le fort inconvénient de ne pas être fonctoriels, et de ramener le problème à des objets pour lesquels une classification (éventuelle) demande à nouveau un nombre important d'invariants (il n'y a pas d'analogue des résultats de Voevodskiĭ, Vishik, Orlov, Arason, Elman dans le cas des formes hermitiennes, mais on connaît des invariants en petite dimension ou petit degré cohomologique).

2.2. **Asymétrie d'un antiautomorphisme linéaire d'algèbre centrale simple.**
Dans un travail commun avec J.P. Tignol [CT1], nous montrons que l'on peut généraliser la notion d'asymétrie aux antiautomorphismes linéaires d'algèbres centrales simples, en passant par un analogue de la pseudo-involution γ_h décrite en 1.4. Nous démontrons :

Proposition 2.1 ([CT1] prop. 4)**.** *Soit (A,σ) une K-algèbre centrale simple munie d'un antiautomorphisme linéaire. Il existe alors une unique application K-linéaire involutive*

$$\gamma_\sigma\colon\ A\to A$$

satisfaisant : pour tout corps de décomposition F de A, pour tout isomorphisme

$$\theta\colon\ A_F=A\otimes_K F\to \operatorname{End}_F V,$$

et pour toute forme bilinéaire non dégénérée b sur le F-espace vectoriel V telle que $\sigma_b=\theta\circ(\sigma\otimes \mathrm{Id}_K)\circ\theta^{-1}$,

$$\theta\circ(\gamma_\sigma\otimes\mathrm{Id}_K)\circ\theta^{-1}=\gamma_b$$

est l'involution linéaire associée à b.

De plus γ_σ satisfait :

i) $\gamma_\sigma\big(xyz\big)=\sigma(z)\gamma_\sigma(y)\sigma^{-1}(x)$ *pour tout x, y, $z\in A$;*

ii) $\gamma_\sigma^2=\mathrm{Id}_A$.

Ceci nous permet de définir une asymétrie :

Définition 2.2 ([CT1])**.** *On appelle asymétrie de (A,σ) l'élément $a_\sigma=\gamma_\sigma(1_A)\in A^\times$.*

Comme dans le cas sesquilinéaire, la classe de conjugaison de a_σ est un invariant de la classe d'isomorphie de (A,σ), et l'asymétrie satisfait

$$\sigma^2=\operatorname{Int}a_\sigma\quad\text{et}\quad\sigma(a_\sigma)=a_\sigma^{-1}$$

ce qui la définit au signe près.

Notons encore que l'antiautomorphisme est involutif si et seulement si son asymétrie est ±1, de type orthogonal si et seulement si c'est 1.

Enfin une définition directe de l'asymétrie peut être donnée grâce à l'isomorphisme d'algèbres "sandwich" :

$$\mathrm{Sand}: A\otimes A^{op}\to\operatorname{End}_K A\,;\ a\otimes b^{op}\mapsto(x\mapsto axb).$$

Soit g l'élément de Goldman de A, c'est-à-dire dont l'image par le sandwich est la trace réduite, considérons σ comme un isomorphisme d'algèbres de A dans son algèbre opposée A^{op}.

Proposition 2.3 ([CT1], prop. 6)**.** *a_σ est déterminé par*

$$\forall x\in A\quad \sigma\Big(\mathrm{Sand}\circ(\mathrm{Id}_A\otimes\sigma)(g)(x)\Big)=a_\sigma x.$$

Cette autre définition peut être généralisée aux antiautomorphismes d'algèbres d'Azumaya : elle s'écrit aussi $\gamma_\sigma=\mathrm{Sand}\circ(\mathrm{Id}\otimes\sigma^{-1})(g)$, ce qui est incidemment utilisé par Saltman dans [Sa1].

Comme dans le cas bilinéaire, nous caractérisons les éléments d'une algèbre centrale simple qui sont des asymétries :

Théorème 2.4 ([CT1] th 2)**.**
Soit A une algèbre centrale simple d'exposant 2. Alors un élément inversible a de A est l'asymétrie d'un antiautomorphisme sur A si et seulement si a et a^{-1} sont conjugués.

2.3. **Le centralisateur de l'asymétrie.**

Soit (A,σ) une K-algèbre centrale simple munie d'un antiautomorphisme linéaire dont l'asymétrie est notée $a_\sigma \in A^\times$. Alors le centralisateur $\mathrm{Z}_A(a_\sigma)$ de a_σ dans A est une sous-K-algèbre de A sur laquelle la restriction σ_Z de σ devient involutive (puisque $\sigma^2 = \operatorname{Int} a_\sigma$). Puisque a_σ et son inverse sont dans le centre de cette algèbre, elle est naturellement munie d'une structure de R-algèbre pour $R = K[X, X^{-1}]$, l'action de X étant donnée par la multiplication par a_σ.

Utilisons donc les notations de 2.1.

Comme $\sigma(a_\sigma) = a_\sigma^{-1}$, on obtient $\sigma_\mathrm{Z}(X) = X^J$ et donc σ_Z est une involution (R,J)-semilinéaire sur une R-algèbre de type fini de centre contenant R (et le contenant en général strictement, par exemple pour $a = 1$), et de radical en général non trivial.

Comment voir une telle algèbre à involution comme une généralisation de formes hermitiennes, donc une généralisation du cas déployé ?

Soit R un anneau principal muni d'une involution J, et h une forme (R,J)-sesquilinéaire $h : M \times M \to E = \operatorname{Frac}(R)/R$ sur un R-module de torsion de type fini M. Supposons-la non dégénérée, c'est-à-dire telle que l'application induite $H^J : M^J \to M^\vee = \operatorname{Hom}_R(M,E)$ soit un isomorphisme de R-modules.

Rappelons que le dual de Pontriyagin $M^\vee$ pour les modules de torsion de type fini sur un anneau principal donne grâce au crochet de dualité un isomorphisme canonique $M \simeq M^{\vee\vee}$ de R-modules, et que tout morphisme de R-modules $u : M \to N$ induit un morphisme transposé $u^t : N^\vee \to M^\vee$; $l \mapsto l \circ u$. De plus l'application

$$(M^\vee)^J = Hom_R(M,E)^J \to (M^J)^\vee = \operatorname{Hom}_R(M^J,E)\,;\; l^J \mapsto (m^J \mapsto l(m)^J)$$

est un isomorphisme canonique de R-modules. Donc J commute avec $\vee$ et avec la transposition.

Ainsi la forme h possède comme dans le cas des formes sesquilinéaires sur un corps une asymétrie $\alpha_h = H^{-1}H^{J^t}$ qui est un R-automorphisme de M. De même l'application

$$\sigma_h : \operatorname{End}_R M \to \operatorname{End}_R M\,;\; u \mapsto \sigma_h(u) = H^{-1} \circ u^{J^t} \circ H$$

est l'adjonction pour h, et est un (R,J)-antiautomorphisme de la R-algèbre $\operatorname{End}_R M$. Enfin, on obtient comme dans 1.4 une pseudo-involution γ_h qui est (R,J)-semilinéaire.

Remarquons que σ_h est involutif si et seulement si α_h est central dans $\operatorname{End}_R M$, ce qui est le cas dès que H est λ-hermitienne, pour un $\lambda \in R$ tel que $\lambda\lambda^J = 1$. En particulier, dans le cadre de Riehm donné en 2.1, pour h la forme $(-X)$-hermitienne sur M associée à la forme bilinéaire b sur V, la restriction σ_Z de l'antiautomorphisme $\sigma = \sigma_b$ de $\operatorname{End}_K V$ à $\mathrm{Z}_{\operatorname{End}_K V}(a_b) = \operatorname{End}_R M$ est involutive (R,J)-semilinéaire.

Réciproquement, un (R,J)-antiautomorphisme de de $\operatorname{End}_R M$ est-il toujours l'adjonction pour une forme sesquilinéaire non dégénérée sur M ? S'il existe une telle forme (c'est le cas dans le cadre du 2.1), alors cette question équivaut au problème de Skolem-Noether pour $\operatorname{End}_R M$, qui a été prouvé par I. Kaplansky :

Théorème 2.5 (Kaplansky [Ka]). *Soit R un anneau principal et M un module de torsion sur R. Alors les automorphismes de $\operatorname{End}_R M$ sont intérieurs.*

La longue et complexe démonstration de Kaplansky utilise une notion ad hoc de cycles, et fait l'objet d'une monographie. Avec J.-P. Tignol [CT2], nous donnons de ce résultat une version très simple dans le cas des modules de type fini.

Il semble alors important de considérer le problème général des involutions (voire des antiautomorphismes) (R, J)-semilinéaires sur le centralisateur de l'asymétrie d'un antiautomorphisme d'une algèbre centrale simple. Voici quelques questions auxquelles il semble intéressant de répondre :

- Quel est le centre d'une telle algèbre ?
- Le théorème de Skoelem-Noether est-il vrai sur ce type d'algèbres ? L'explicitation du centre permettrait en particulier d'essayer les méthodes classiques de descente galoisienne pour déduire le cas général du cas déployé.
- Quelles algèbres sur un anneau principal ont le même type de structure, et donc généralisent la notion de forme sesquilinéaire sur un module de torsion de type fini ? (i.e. quel est le cadre non déployé correspondant).
- Quels invariants peut-on définir pour un antiautomorphisme sur une telle algèbre ? En particulier, peut-on généraliser les invariants de Riehm aux formes sesquilinéaires (ou λ-hermitiennes) en général sur un module de torsion de type fini sur un anneau principal ? Et dans le cas "non déployé", un antiautomorphisme sur $\mathrm{Z}_A(a)$ est-il caractérisé par une série d'involutions sur des algèbres centrales simples sur des corps ?

Pour revenir à l'antiautomorphisme de départ, une question fondamentale est ouverte (que A soit ou non déployée) : Existe-t-il des antiautomorphismes d'algèbres centrales simples non isomorphes ayant même asymétrie et même restriction au centralisateur de l'asymétrie ? Il semble problable de pouvoir construire de tels exemples. S'il y a plusieurs tels antiautomorphismes, alors comment caractériser toutes les solutions ?

Dans le cas déployé, deux formes bilinéaires ayant la même asymétrie et dont l'adjonction a même restriction au centralisateur de cette asymétrie, sont associées par Riehm à deux formes $(-X)$-hermitiennes . Celles-ci sont alors proportionnelles avec un coefficient de proportionalité dans le centre de $\mathrm{Z}_A(a_\sigma)$ et non plus dans l'anneau de base.

2.4. **La pseudo-involution associée à un antiautomorphisme.**

Nous venons d'observer que la généralisation des antiautomorphismes à un certain type d'algèbres non centrales simples, et sur un anneau au lieu d'un corps, mais en gagnant le caractère involutif, pouvait donner des informations sur les automorphismes d'algèbres centrales simples.

De la même manière, il est certainement intéressant de généraliser notre étude au cas des applications linéaires sur des algèbres centrales simples, en perdant cette fois-ci le caractère antiautomorphisme pour la propriété plus faible de "pseudo-antiautomorphisme" mais en gagnant encore le caractère involutif : c'est l'étude de γ_σ défini à la proposition 2.1.

Aucun résultat n'existe à ma connaissance sur ce type d'objets. Pourtant c'est cette pseudo-involution γ_σ qui sera largement utilisée dans la partie 4 de ce texte pour définir des invariants des antiautomorphismes linéaires des algèbres centrales simples.

3. Groupes de Tate-Chafarevitch de tores algébriques

3.1. **Le principe de Hasse pour les isomorphismes et similitudes de formes bilinéaires.**

Nous nous intéressons ici au cas de formes bilinéaires sur un corps de nombres K. D'après le théorème de Hasse-Minkowski, deux formes quadratiques sur un corps de nombres sont isomorphes si et seulement si elles le sont sur tous ses complétés. On se pose alors la question pour les formes bilinéaires asymétriques, et pour les similitudes au lieu des isomorphismes. C'est ce qu'on appelle un principe de Hasse.

Si la classification de Riehm décrite en 2.1 a permis a W.C. Waterhouse de démontrer que le principe de Hasse est vrai pour les isomorphismes de formes bilinéaires [Wa], elle n'est pas utilisable pour généraliser le théorème de Ono [On], démontrant le principe de Hasse pour les similitudes de formes quadratiques, au cas des similitudes de formes bilinéaires.

L'utilisation de la cohomologie galoisienne se révèle ici un outil fondamental, appliqué à des suites exactes de groupes algébriques du type de celle donnée dans la section 1.1 : si l'on désigne par $\mathrm{O}(b)$ (resp. $GO(b)$) le groupe des isométries de la forme bilinéaire b (resp. des similitudes), alors $H^1(K, \mathrm{O}(b))$ (resp. $H^1(K, \mathrm{GO}(b))$) s'identifie à l'ensemble des classes d'isomorphie de formes bilinéaires sur K qui deviennent isomorphes à b sur la cloture séparable de K. L'obstruction éventuelle au principe de Hasse est donc le noyau de l'application naturelle d'ensembles pointés

$$H^1(K, G) \to \prod_{v \in \Sigma} H^1(K_v, G)$$

où Σ est l'ensemble des places de K et G est le groupe algébrique $\mathrm{O}(b)$ ou $\mathrm{GO}(b)$.

Ceci a été le travail de ma thèse.

Dans [C1], j'utilise la forme donnée (au cas par cas) par J. Dieudonné [Di] du groupe $\mathrm{MS}(q)$ des multiplicateurs de similitude (redémontrée avec des méthodes plus synthétiques et généralisée aux formes hermitiennes), la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte courte de groupes algébriques $1 \to \mathrm{O}(q) \to \mathrm{GO}(q) \to \mathrm{MS}(q) \to 1$ associés à la forme quadratique q (resp. la suite exacte $1 \to \mathrm{U}(h) \to \mathrm{GU}(h) \to \mathrm{MS}(h) \to 1$ de groupes algébriques associés à la forme hermitienne h), et de la chasse au diagramme pour démontrer le principe de Hasse pour les similitudes de formes quadratiques (théorème de Ono) ou de formes hermitiennes.

Pour les formes bilinéaires, il est intéressant de remarquer le résultat suivant :

Proposition 3.1. *Soit b une forme bilinéaire sur le K-espace vectoriel V d'asymétrie a_b, d'adjonction σ_b. Notons $Z = \mathrm{Z}_{\mathrm{End}_K V}(a_b)$, qui est muni de l'involution σ_Z restriction de σ_b à Z, considérée ici comme une involution de la K-algèbre Z. Alors*

$$\mathrm{O}(b) = \mathrm{U}(Z, \sigma_Z).$$

Plus généralement, si σ est un antiautomorphisme de première espèce sur la K-algèbre centrale simple A d'asymétrie a_σ, et σ_Z est l'involution induite sur la K-algèbre $Z = \mathrm{Z}_A(a_\sigma)$, alors

$$\mathrm{GU}(A, \sigma) = \mathrm{GU}(Z, \sigma_Z).$$

En effet, si $u \in \mathrm{GU}(A, \sigma)$, alors soit $\lambda = \sigma(u)u \in K^\star$. On obtient

$$\sigma^2(u) = a_\sigma u a_\sigma^{-1} = \sigma(\lambda u^{-1})\lambda(\lambda u^{-1})^{-1} = u$$

donc $u \in Z$.

Alors, $\mathrm{U}(Z)$ étant connexe, l'isomorphisme naturel

$$H^1(K,\mathrm{U}(Z)) \simeq H^1(K,\mathrm{U}(Z/\operatorname{Rad}(Z)))$$

dû à J. Sansuc [San] permet de se ramener à une involution sur une algèbre semi-simple, donc à une série finie d'involutions sur des algèbres centrales simples sur des extensions finies du corps de base, et ainsi à des formes hermitiennes ou bilinéaires symétriques ou antisymétriques.

Le théorème de Waterhouse (PH pour les isométries de formes bilinéaires) est alors une conséquence du théorème de Hasse-Minkowski et du théorème de Landherr (PH pour les isométries de formes hermitiennes).

3.2. **L'obstruction à un principe de Hasse sur les normes.**

Ces arguments ne fonctionnent plus pour $\mathrm{GU}(Z)$. De plus, même si Z est simple, ce groupe n'est pas le groupe des similitudes de la forme hermitienne correspondante sur l'extension de K, mais le groupe des similitudes à facteurs dans K. On arrive alors à construire des contre-exemples dans [C2] et [CG] (en collaboration avec G. Gras), et à déterminer l'obstruction dans [C3] au principe de Hasse pour les similitudes de formes bilinéaires dans le cas où Z est un corps L, de sous-corps fixe L_0 par l'involution.

Il s'agit alors de résoudre le principe de Hasse suivant pour les normes : être dans $K^\star N_{L/L_0}(L^\star)$, ce qui revient à déterminer le groupe d'obstruction au principe de Hasse :

$$Ш(K,L_0,L) = Ш(k,T) = \ker\Big(H^1(K,T) \to \prod_{v\in\Sigma} H^1(K_v,T)\Big)$$

où T est le tore normique noyau de

$$\mathbb{G}_\mathrm{m} \times \mathbf{R}_{L/K}\,\mathbb{G}_\mathrm{m} \to \mathbf{R}_{L_0/K}\,\mathbb{G}_\mathrm{m}\,;\ (x,y) \mapsto xN_{\mathbf{R}_{L/K}\,\mathbb{G}_\mathrm{m}\,/\,\mathbf{R}_{L_0/K}\,\mathbb{G}_\mathrm{m}}(y)$$

(ici $\mathbf{R}$ désigne la restriction de Weil et N la norme).

Le dual de ce groupe est d'après le théorème de Tate (voir par exemple [PR]) :

$$\widehat{Ш(k,T)} = \ker\Big(H^2(G,M) \to \prod_{v\in\Sigma} H^2(G_v,M)\Big)$$

où G est le groupe de Galois d'une extension galoisienne F/K qui scinde T, G_v est son groupe de décomposition en v, et $M = \operatorname{Hom}(T,\mathbb{G}_\mathrm{m})$.

Les techniques d'arithmétique des groupes algébriques décrites par V.P. Platonov et A.S. Rapinchuck dans [PR] permettent alors d'exprimer notre groupe de Tate-Chafarevitch grâce aux groupes $G, G_v, H = \operatorname{Gal}(L/L_0), H_v$ et à des morphismes naturels de restriction, corestriction, tranfert.

Dans [C3], on arrive alors à expliciter l'obstruction au principe de Hasse sur les normes ci-dessus de manière très générale. Le résultat est très complexe mais peut être exprimé simplement si par exemple L/K est galoisienne. On obtient alors

Théorème 3.2 ([C3], th. p. 750)**.**
Le groupe de Tate-Chafarevitch du tore T considéré est

$$Ш(k,T) = \ker\mu/\delta(\ker\eta)$$

où les flèches μ,δ,η sont définies comme suit :

– *L'application μ est le transfert $ver_H^G : G^{ab} \to H$ et δ_v est l'injection $G_v^{ab} \to G^{ab}$;*

– *Soit* x_i^v, $i = 1, \ldots, r_v$ *un système de représentants des doubles classes de* $G_v \backslash G/H$ *et* $H_i^v = G_v \bigcap x_i^v H (x_i^v)^{-1}$. *Alors* $\eta_v = \sum_{i=1}^{r_v} ver_{H_i^v}^{G_v} : G_v^{ab} \to \bigoplus_{i=1}^{r_v} H_i^v$ *et* γ_i^v *est la conjugaison par* $(x_i^v)^{-1} : H_i^v \to H$.

Ces flèches sont résumées par le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H & \xleftarrow{\mu} & G^{ab} \\ \uparrow \gamma & & \uparrow \delta \\ \prod_{v \in \Omega} (\bigoplus_{i=1}^{r_v} H_i^v) & \xleftarrow{\eta} & \prod_{v \in \Omega} G_v^{ab} \end{array}$$

On en déduit ([C3], prop. p751) que l'obstruction dans le cas galoisien est un produit de groupes d'ordre 2.

Le théorème permet de se lancer dans des calculs explicites et de montrer qu'il n'y a pas d'obstruction pour une extension galoisienne L/K de degré < 8 et que des extension telles que $G = H_8$ ou $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ pourraient conduire à des obstructions.

En utilisant $L_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{41})$ et l'extension galoisienne

$$L = L_0\Big(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}.\frac{41+\sqrt{5}\sqrt{41}}{2}}\Big)$$

de $\mathbb{Q}$, de groupe de Galois H_8 issue des travaux de J. Martinet [Ma], je montre dans [C2] que $a = 3\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est dans $K_v^\star N_{L_v/L_{0,v}}(L_v^\star)$ pour toute place v de K mais n'est pas dans $K^\star N_{L/L_0}(L^\star)$. En remontant la méthode de Riehm et en utiliant le système PARI, on trouve alors numériquement deux formes bilinéaires sur $\mathbb{Q}$ semblables partout localement mais non semblables sur $\mathbb{Q}$. Le coefficients de ces formes dans la base canonique sont des fractions rationnelles irréductibles dont numérateur et dénominateurs ont jusqu'à 28 chiffres.

Un autre contre-exemple explicite, conduisant à des nombres moins grands (6 chiffres) est alors construit dans [CG] avec G. Gras. Il fait partie d'une famille infinie de contre-exemples sur $K = \mathbb{Q}$ pour lesquels $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. On y explicite plus généralement l'interprétation suivante de l'obstruction au principe de Hasse normique considéré, dans le cadre des voies explicites du corps de classes :

Théorème 3.3 ([CG]).
Si $L = L_0(\sqrt{\delta})$, *posons* $d = N_{L_0/\mathbb{Q}}(\delta)$ *et* $E = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. *Soit* F *la clôture galoisienne de* $L/\mathbb{Q}$.

Alors il existe une 2*-extension abélienne élémentaire explicite* E'' *de* $\mathbb{Q}$ *contenant* E *et une extension* E' *de* E *incluse dans* E'' *telles que*

$$\text{Ш}(K, L_0, L) \simeq \mathrm{Gal}(E'/E) \quad et \quad \mathrm{Gal}(E''/E') = I'' < \psi(R') >$$

où le groupe I'' *est un invariant galoisien se lisant sur le schéma de corps* $F/F \bigcap E''/\mathbb{Q}$, *et* $< \psi(R') >$ *dépend simplement de symboles de Hilbert explicites liés à l'ensemble* R *des places de* $\mathbb{Q}$ *ramifiées dans* $F/\mathbb{Q}$.

3.3. **La conjecture de Le Bruyn.**

Les techniques de calculs de groupes de Tate-Chafarevitch ci-dessus peuvent être appliquées à d'autres groupes.

Soient T un F-tore algébrique, L le corps de déploiement de T, i.e. l'extension galoisienne minimale telle que $T \times_F L \simeq \mathbb{G}_{\mathrm{m}}{}^r$, et $\Gamma = \mathrm{Gal}(L/F)$ le groupe de déploiement de T. Soit $M = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ le groupe des caractères du tore ; c'est un $\mathbb{Z}$-réseau muni naturellement d'une action de Γ.

Considérons le groupe de Tate-Chafarevitch

$$Ш^2_\omega(F,T) = \ker\Big(H^2(\Gamma, M) \longrightarrow \prod_{g\in\Gamma} H^2(\langle g\rangle, M)\Big).$$

C'est un invariant birationnel du tore T, qui est nul dès que T est stablement rationnel.

Par exemple, si T est un tore normique bicyclique, i.e. le noyau de la norme $\mathbf{R}_{L/F}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m},F}$, où $\mathbf{R}_{L/F}$ désigne la restriction de Weil de L à F, et où L/F est une extension galoisienne de groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, alors $Ш^2_\omega(F,T) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est non trivial. Ce tore est donc non stablement rationnel ([CH], voir [CTS] ou [Vo1]).

Soit $T_{K/F}$ le tore normique correspondant à une extension séparable K/F générique de degré n, c'est-à-dire telle que le groupe de Galois de la clôture normale L de K/F est le groupe symétrique S_n :

$$T_{K/F} = \ker(N : \mathbf{R}_{K/F}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m},F}).$$

Un tel tore est appelé tore normique générique et noté T_n.

Dans [LB], Le Bruyn prouve que le tore normique générique T_n n'est pas stablement rationnel sur F si n est premier, et conjecture que T_n n'est jamais stablement rationnel pour $n > 3$ excepté peut-être pour $n = 6$.

Dans un travail commun avec B. Kunyavskiĭ[CK], nous prouvons la proposition suivante comme conséquence des 4 lemmes ci-après :

Proposition 3.4 ([CK], prop. 0.2).
Le tore normique générique T_n n'est pas stablement rationnel pour $n > 3$.

Lemme 3.5. *Soit $n = rs$ avec $r, s > 1$ et soit K/F une extension générique de degré n. Si $T_{K/F} = T_n$ est stablement rationnel sur F, alors il existe une extension E/F et une extension générique K'/E de degré r telles que $T_{K'/E} = T_r$ est stablement rationnel sur E.*

En effet on peut trouver un sous-groupe U de S_n, isomorphe à S_r tel que sur $E = L^U$, le tore $T_n \times_F E$ soit produit direct du tore générique T_r sur E et d'un tore quasi-trivial.

Lemme 3.6 (Le Bruyn [LB]). *Si $n > 3$ est premier, alors T_n n'est pas stablement rationnel.*

Lemme 3.7 (Saltman-Snider [Sa2]). *Si n est divisible par un carré, alors T_n n'est pas stablement rationnel.*

Lemme 3.8. *T_6 n'est pas stablement rationnel.*

En effet, le sous-groupe U de S_6 engendré par les permutations $(12)(34)$ et $(34)(56)$ permet de définir une extension $E = L^U$ pour laquelle

$$Ш^2_\omega(E, T_6 \times_F E) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

n'est pas trivial. Donc $T_6 \times_F E$ n'est pas stablement rationnel sur E et ainsi T_6 ne l'est pas sur F.

Notons les critères de rationalité des tores algébriques obtenus récemment par Voskresenskiĭ[Vo5].

3.4. **Tore générique et rationalité des groupes linéaires simples.**

Soient k un corps, G un k-groupe réductif, T_0 un k-tore maximal de G, on note $N = \mathrm{Nor}_G(T_0)$ le normalisateur de T_0. La variété homogène $X = G/N$ est dite *variété des tores maximaux* de G : en effet, tous les tores maximaux étant conjugués, à chaque tore maximal T on peut associer $g \in G$ tel que $g^{-1}Tg = T_0$, cet élément étant défini à un facteur de N près.

On construit une fibration "tautologique" $\pi\colon H \longrightarrow X$ où H est l'image du morphisme

$$\alpha\colon G \times_k T_0 \longrightarrow X \times_k G\,,\ (g,t) \mapsto (gN, gtg^{-1})$$

et où π est la première projection. On peut montrer que H est birationnellement équivalent à G [Vo4]. Soit alors x un point générique de X, c'est-à-dire tel que $k(x) = k(X) = F$.

La fibre $\pi^{-1}(x) = T_x$ est appelée *tore générique* de G.

Une des approches au problème de la rationalité d'un groupe algébrique linéaire connexe G, défini sur un corps k, est basée sur la présentation du corps des fonctions $k(G)$ sous la forme $F(T_x)$, où $F = k(X)$ est le corps des fonctions de la variété X des tores maximaux de G, et où T_x est un tore générique de G. En effet, d'après Chevalley–Grothendieck (cf [CH] ou[DG]) la variété X est k-rationnelle et la F-rationalité de T_x impliquerait immédiatement la k-rationalité de G.

Cette méthode donne par exemple la rationalité de toutes les k-formes des groupes semi-simples adjoints de type A_{2l} (voir [VK]).

Notons que les exemples de groupes semi-simples non rationnels ne sont pas nombreux :
– Les exemples classiques de Serre [Se] (où les groupes ne sont ni simplement connexes, ni adjoints) ;
– Ceux de Platonov pour certains groupes simplement connexes de type A_l [P], qui sont généralisés par Rost et Merkurjev [M1], et de type D_{2l+1} [P] ;
– Et enfin ceux de Merkurjev [M2] et Gille [G] pour les groupes adjoints de type D_l.

On aurait pu espérer obtenir, pour les types qui restent, des résultats grâce aux propriétés des tores génériques. Mais l'étude suivante montre (théorème 3.10) les limites de l'utilisation de cette méthode.

3.5. **Rationalité du tore générique.**

Soient G un groupe simple sur k, $F = k(X)$ le corps des fonctions de la variété X des tores maximaux de G, T le tore générique de G, R le système de racines associé. Alors $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ échange les racines ; le groupe de déploiement Γ agit donc sur R et se plonge dans le groupe $\mathrm{A}(R)$ des automorphismes du système de racines.

Le groupe G est dit adjoint si M est le réseau $\mathrm{Q}(R)$ des racines du système, et simplement connexe si M est le réseau $\mathrm{P}(R)$ des poids du système. Notons encore $\mathrm{W}(R)$ le groupe de Weyl du réseau R. L'action du groupe de déploiement de T est alors précisée par le théorème suivant :

Théorème 3.9 (Voskresenskiĭ, [Vo4])**.**
Soient G un groupe simple, T son tore générique, Γ le groupe de déploiement de T, et R le système de racines associé. Alors

$$W(R) \subseteq \Gamma \subseteq A(R).$$

De plus, si G est une forme interne, alors $\Gamma = W(R)$.

Si G est une forme interne d'un groupe simplement connexe de type A_l, alors $M = \mathrm{P}(A_l)$ et d'après le théorème 3.9, $\Gamma = \mathrm{W}(A_l) = S_{l+1}$ et M est isomorphe comme $\mathbb{Z}[S_{l+1}]$-module à $\mathbb{Z}[S_{l+1}/S_l]/\mathbb{Z}$. Ainsi la proposition 3.4 montre que le tore générique d'une forme interne d'un groupe simplement connexe de type A_l n'est pas stablement rationnel.

Intressons-nous de manière plus générale à la rationalité du tore générique d'un groupe simple. Le résultat précédent permet de conclure que le tore générique n'est pas stablement rationnel dans tous les cas non précédemment connus, et ainsi de démontrer :

Théorème 3.10 (Voskresenskiĭ, Cortella-Kunyavskiĭ).
Soit G un k-groupe simple, adjoint ou simplement connexe, et soit T le tore générique de G. Si G est d'un des types suivants :

1) $\operatorname{rg} G \leq 2$,

2) G est une forme interne d'un groupe adjoint de type A_l,

3) G est une forme d'un groupe adjoint de type A_{2l},

4) G est une forme d'un groupe adjoint de type B_l,

5) G est une forme d'un groupe simplement connexe de type C_l,

alors T est rationnel. Sinon, T n'est pas stablement rationnel.

Donnons tout d'abord les références des preuves de la rationalité pour les cas 1) à 5) du théorème 3.10.

1) Tous les tores de dimension ≤ 2 sont rationnels d'après [Vo1].
2) Si $M = \mathrm{Q}(A_l)$ et $\Gamma = \mathrm{W}(A_l) = S_{l+1}$, alors le $\mathbb{Z}[S_{l+1}]$-module M est l'idéal d'augmentation $I_{l+1} = \ker(\mathbb{Z}[S_{l+1}/S_l] \to \mathbb{Z})$. Le tore correspondant est rationnel [Vo1].
3) Si $M = \mathrm{Q}(A_{2l})$ alors $M = I_l \otimes I_2$. Le tore générique est rationnel [Vo3].
4) et 5) Dans ces deux cas duaux, les représentations de Γ dans $\mathrm{A}(R)$ sont orthogonales (i.e. la forme $x_1^2 + ... + x_n^2$ est Γ-invariante) et le tore générique est rationnel [Vo2].

Pour les autres groupes simples, adjoints ou simplement connexes, pour montrer que le tore générique n'est pas stablement rationnel, il suffit de trouver dans chaque cas un sous-groupe U de Γ tel que sur $E = L^U$, le tore $T \times_F E$ est stablement équivalent à un tore T' que l'on sait être non stablement rationnel.

Il s'avère que l'on peut toujours choisir T' de dimension trois et utiliser la classification birationnelle présentée dans [Ku] ; de plus, dans la plupart des cas, on peut prendre pour T' le tore normique $T_{K/E}$ associé à une extension biquadratique K/E.

Pour $R = A_3$, $M = \mathrm{Q}(A_3)$ et $\Gamma = \mathrm{A}(A_3) = S_4 \times \langle\sigma\rangle$, où σ agit comme -1, on peut prendre $U = \langle \sigma(12), \sigma(34)\rangle$, alors comme $\mathbb{Z}[U]$-module, $M \simeq \mathbb{Z}[U]/\mathbb{Z}$. C'est le module des caractères du tore normique biquadratique.

Pour $R = D_3$, $M = \mathrm{P}(D_3)$, on peut prendre $U = \langle c_1c_2, c_2c_3\rangle$, où c_i est le changement de signe du i-ème vecteur de base de $\mathbb{R}^3$. On obtient encore un tore normique biquadratique $M \simeq \mathbb{Z}[U]/\mathbb{Z}$.

Pour $R = D_4$, $M = \mathrm{P}(D_4)$, on peut trouver U de type $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ tel que $T \times_F E$ soit stablement équivalent à un tore non stablement rationnel de la liste de [Ku].

On fait ensuite, en partant de ces trois cas, une preuve inductive suivant les diagrammes ci-dessous. Sur ces diagrammes, une flèche signifie que grâce au sous-groupe U_0 de Γ_0 exhibé à l'origine de la flèche, on peut trouver "naturellement" un sous-groupe U_1 de Γ_1

à l'extrémité de la flèche tel que la présence d'un tore non rationnel dans $T_1 \times E_1$ soit issue d'une inclusion du $\mathbb{Z}[U_0]$-module des caractères du tore non rationnel $T_0 \times E_0$ dans le $\mathbb{Z}[U_1]$-module des caractères de $T_1 \times E_1$.

La notation $\mathrm{Q}(R)_{ext}$ signifie dans le diagramme que l'on considère une forme externe (adjointe) de type R.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Q}(A_3)_{ext} \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[d, equal] & & \mathrm{Q}(A_{2l+1})_{ext} & & \mathrm{P}(B_3) \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{P}(B_{2l+1}) \\
\mathrm{Q}(C_3) \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[d, equal] & & \mathrm{Q}(C_l) & \mathrm{P}(A_3) \arrow[r, equal] & \mathrm{P}(D_3) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] & \mathrm{P}(D_{2l+1}) \arrow[u, Rightarrow] \\
\mathrm{Q}(D_3)_{ext} \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{Q}(D_4) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \mathrm{Q}(D_l) \arrow[u, Rightarrow] & & \mathrm{P}(B_4) \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{P}(B_{2l}) \\
& & \mathrm{Q}(E_6) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{Q}(E_7) \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{P}(D_4) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{P}(D_{2l}) \arrow[u, Rightarrow] \\
& \mathrm{P}(E_6) & \mathrm{P}(E_7) & \mathrm{Q}(E_8) & \mathrm{P}(F_4) \arrow[r, equal] & \mathrm{Q}(F_4)
\end{tikzcd}
$$

4. Invariants et résultats de classifications dans le cas central simple

4.1. Le discriminant.

Le déterminant des formes bilinéaires ne peut pas se généraliser au cas des antiautomorphismes en degré pair : si c'est bien un invariant de la classe d'isomorphie de la forme, ce n'en est plus un pour la classe de similitude. Par contre, si σ est un antiautomorphisme sur une algèbre déployée de degré pair, $\operatorname{disc} b$ est bien indépendant de la forme b choisie telle que $\sigma_b = \sigma$ (définie à similitude près).

Le discriminant d'une involution linéaire de type orthogonal sur une algèbre centrale simple de degré pair $n = 2m$ a été tout d'abord défini par N. Jacobson dans [J] : il définit déjà l'algèbre de Clifford de l'involution par descente Galoisienne depuis un corps de déploiement pour généraliser la partie paire de l'algèbre de Clifford d'une forme quadratique. Puis il définit le discriminant comme la classe de $d \in K^\star/(K^\star)^2$ tel que le centre de l'algèbre de Clifford est l'algèbre étale $K[X]/(X^2 - d)$.

Une définition intrinsèque de cet invariant de la classe d'isomorphie d'une algèbre à involution a ensuite été donnée par M.-A. Knus, Parimala et Sridharan [KPS] comme $(-1)^m$ fois la norme réduite de n'importe quel élément de $A^\times$ antisymétrique pour l'involution σ (voir aussi [KMRT], prop. 7.1 p81).

C'est cette définition que l'on généralise avec J.-P. Tignol pour σ antiautomorphisme plus nécessairement involutif. En effet, on peut néanmoins considérer les éléments antisymétriques pour la pseudo-involution linéaire γ_σ (voir 2.1) : notons

$$\operatorname{Skew}(A, \gamma_\sigma) = \{x \in A, \quad \gamma_\sigma(x) = -x\}.$$

Proposition 4.1 ([CT1], lemme 3)**.**
Soit A une algèbre centrale simple de degré $n = 2m$ pair, munie d'un antiautomorphisme linéaire σ. Alors $\operatorname{Skew}(A, \gamma_\sigma) \bigcap A^\times$ est non vide et $\operatorname{Nrd} x \in K^\star/(K^\star)^2$ est indépendant de x pris dans cet ensemble.

Définition 4.2 ([CT1])**.**
On appelle alors discriminant de (A, σ) la classe

$$\operatorname{disc}(A, \sigma) = (-1)^m \operatorname{Nrd} x \in K^\star/(K^\star)^2$$

pour l'un quelconque des éléments $x \in \operatorname{Skew}(A, \gamma_\sigma) \bigcap A^\times$.

Ceci définit un invariant de la classe d'isomorphie de (A, σ) qui généralise le cas involutif orthogonal ainsi que le discriminant (à signe) d'une forme bilinéaire.

Notons que le discriminant se comporte bien vis-à-vis de la somme orthogonale :

Théorème 4.3 ([CL], th. 2.21)**.**
Soient (A, σ) et (B, τ) deux algèbres centrales simples munies d'un antiautomorphisme Morita équivalentes. Alors indépendemment de la donnée d'équivalence de Morita sesquilinéaire,

$$\operatorname{disc}((A, \sigma) \perp (B, \tau)) = \operatorname{disc}(A, \sigma) \operatorname{disc}(B, \tau).$$

Mes calculs et observations ne m'ont pas permis pour l'instant d'établir un lien direct, dans le cas déployé, entre le discriminant d'une forme bilinéaire et les discriminants des formes qui lui sont associées par Riehm.

4.2. **L'algèbre de Clifford.**

On suppose ici que le corps de base K est de caractéristique différente de 2.

Comme pour le discriminant, une définition intrinsèque de l'algèbre de Clifford d'une algèbre centrale simple à involution de type orthogonal a fait suite à celle donnée par N. Jacobson [J] : la définition de Tits [T] est donnée comme pour les formes quadratiques par un quotient d'algèbre tensorielle $T(\underline{A})$ de l'espace vectoriel $\underline{A}$ sous-jacent à l'algèbre A.

C'est cette définition que je généralise dans [C4] pour définir un invariant de la classe d'isomorphie d'une algèbre à antiautomorphisme.

Si f est un endomorphisme linéaire involutif d'un espace vectoriel V, l'ensemble des éléments symétriques pour f est noté $\mathrm{Sym}(V, f) = \ker(f - \mathrm{Id})$.

Définition 4.4 ([C4], def.2.1.).
L'algèbre de Clifford $C(A, \sigma)$ est le quotient

$$C(A, \sigma) = T(\underline{A})/(J_1(A, \sigma) + J_2(A, \sigma))$$

où

1) *$J_1(A, \sigma)$ est l'idéal de $T(\underline{A})$ engendré par les $s - \frac{1}{2}\operatorname{Trd} s$ pour $s \in \mathrm{Sym}(\underline{A}, \gamma_\sigma)$.*
2) *$J_2(A, \sigma)$ est l'idéal de $T(\underline{A})$ engendré par les $u - \frac{1}{2}\mu_\sigma(u)$ pour $u \in \mathrm{Sym}(\underline{A} \otimes \underline{A}, \gamma_{\tilde{\sigma},2})$, en notant*
   - *(i) $\tilde{\sigma} = (\operatorname{int} a_\sigma) \circ \sigma$ qui est un antiautomorphisme de A et donc $\gamma_{\tilde{\sigma}}$ est l'application linéaire involutive de $\underline{A}$ associée à $\tilde{\sigma}$;*
   - *(ii) $\gamma_{\tilde{\sigma},2}$ est l'application linéaire involutive induite par $\gamma_{\tilde{\sigma}}$ sur $\underline{A} \otimes \underline{A}$ grâce au sandwich :*

     $$\forall u \in A \otimes A^{op} \quad \forall x \in A \quad (\operatorname{Sand} \gamma_{\tilde{\sigma},2}(u))(x) = (\operatorname{Sand} u)(\gamma_{\tilde{\sigma}}(x))\,;$$

   - *(iii) si $u \in \underline{A} \otimes \underline{A}$, $\quad \mu_\sigma(u) = (\operatorname{Sand} u)(a_\sigma)$.*

Dans le cas déployé, je montre que ce quotient ne fait intervenir que la forme bilinéaire pour laquelle σ est l'adjonction et son asymétrie. C'est la partie paire de ce que l'on peut définir comme étant l'algèbre de Clifford d'une forme bilinéaire :

Définition 4.5 ([C4], def. 2.6).
Soit b une forme bilinéaire non dégénérée sur un espace vectoriel V, d'asymétrie a_b. On appelle algèbre de Clifford de b l'algèbre

$$C(V, b) = T(V)/ < a_b(v) \otimes v - b(v, v) > .$$

Très peu de résultats structurels ont pu être obtenus pour l'algèbre de Clifford d'un antiautomorphisme : j'ai démontré dans [C4] qu'elle est de dimension $\leq 2^{\deg A - 1}$, et que si $\deg A = 2$, alors

$$C(A, \sigma) \simeq K[X]/(X^2 - \mathrm{Nrd}(a_\sigma + 1)\operatorname{disc}(\sigma)).$$

Ni sa dimension, ni son centre ne sont connues dans le cas général, même si l'on peut espérer que ce centre est entièrement déterminé par l'asymétrie et le discriminant, voire que c'est l'algèbre ci-dessus. On voudrait alors en partculier obtenir des résultats quand cette algèbre est étale, et en particulier quand $a_\sigma^2 - 1 \in A^\times$.

Aucun résultat n'a encore été obtenu en général pour l'algèbre de Clifford d'une somme directe. En particulier, on souhaiterait étendre le résultat de I. Dejaiffe [D] exprimant l'algèbre de Clifford du produit de deux algèbres à involution équivalentes de même type comme un produit tensoriel croisé des algèbres de Clifford des deux involutions.

4.3. **La forme trace.**

On se place ici encore en cactéristique différente de 2.

Si (A, σ) est une algèbre à involution, on lui associe une forme quadratique sur l'espace vectoriel sous-jacent $\underline{A}$, appelée *forme trace* (voir[KMRT] ch II-11). Cette forme quadratique, qui est non dégénérée et invariante par σ, a été étudiée en particulier par D. Lewis et J.-P. Tignol [LT1], et par A. Quéguiner [Q1] pour les involutions, resp. de première et seconde espèce, sur des algèbres centrales simples.

Un des intérêts de cette forme est qu'elle détermine complètement $\sigma \otimes \sigma$, qui n'est autre que l'adjonction pour T_σ modulo l'identification $\sigma_\star = \mathrm{Sand} \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \sigma) : \underline{A} \otimes \underline{A} \to \mathrm{End}_K \underline{A}$. On définit ainsi une *signature* de σ (pour un ordre de K) comme étant une racine carrée d'une signature de T_σ (qui est toujours le carré d'un entier).

Pour une algèbre à antiautomorphisme linéaire, D. Lewis a également défini une telle forme [L1] : la forme trace de (A, σ), est la forme quadratique définie sur $\underline{A}$ par

$$T_\sigma(x) = \mathrm{Tr}_{A/K}(\sigma(x)x),$$

et associée à la forme bilinéaire définie par $B_\sigma(x, y) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}_{A/K}(\sigma(x)y + \sigma(y)x)$.

Il établit alors deux propriétés importantes de ces formes :

Proposition 4.6 ([L1] prop 4 et prop 5)**.**

Soit K un corps avec $\mathrm{car}\, K \neq 2$. Soit (A, σ) une algèbre centrale simple munie d'un antiautomorphisme de première espèce, d'asymétrie a_σ, alors

- *T_σ est non-singulière si et seulement si l'équation $xa_\sigma + a_\sigma x = 0$ n'a pas de solution non triviale pour $x \in A$.*
- *Le déterminant de T_σ est un carré de K.*

Malheureusement la signature de la trace n'est plus nécessairement un carré (voir [L1] pour un contre-exemple).

On pourrait espérer obtenir de meilleurs résultats pour la forme trace associée à la pseudo-involution γ_σ. Les investigations menées avec D. Lewis sur T_{γ_σ} montrent "malheureusement" que cette forme, dont le déterminant est quand même encore un carré, est non dégénérée si et seulement si T_σ l'est. Plus précisément, quand A est déployée, les formes T_σ et T_{γ_σ} sont isomorphes.

Peut-être faudrait-il utiliser une autre forme trace liée à σ pour obtenir de "bons" résultats.

La restriction de la forme trace aux éléments symétriques (ou antisymétriques) de A pour σ permet pour les involutions orthogonales de retrouver le discriminant de σ (résultat obtenu indépendemment par D. Lewis et A. Quéguiner). Des calculs incomplets nous font conjecturer (avec D. Lewis) :

Conjecture 4.7.

Le déterminant de la restriction T^- de T_{γ_σ} à $\mathrm{Skew}(A, \gamma_\sigma)$ est

$$\det(T^-) = \mathrm{Tr}(a_\sigma) \det(\sigma) \in K^\star/(K^\star)^2.$$

4.4. **En petite dimension cohomologique.**

Aucun résultat n'est encore connu pour la classification des algèbres à antiautomorphisme, serait-ce de première espèce, en petite dimension cohomologique. Il est pourtant clair, grâce à leurs invariants cohomologiques et aux travaux de Voevodskiĭ, Vishik, Orlov [Vi], et de Arason et Elman [AE], que quelques invariants (cohomologiques) suffisent à classifier les formes quadratiques en petite dimension cohomologique.

Des résultats ont été obtenus par Lewis et Tignol [LT2] pour les involutions sur des algèbres centrales simples. On note ici $I(K)$ l'idéal fondamental formé des formes quadratiques de dimension paire dans l'anneau de Witt du corps K.

Théorème 4.8 ([LT2], th A)**.**
Supposons $I^3(K) = 0$. Alors
- *Toutes les involutions symplectiques sur une K-algèbre centrale simple A donnée sont isomorphes.*
- *Deux involutions orthogonales sur une K-algèbre centrale simple donnée sont isomorphes si et seulement si elles ont même algèbre de Clifford.*

Supposons maintenant que K est de dimension cohomologique au plus 2 (ce qui implique que $I^3(K) = 0$). Alors
- *Toutes les involutions de deuxième espèce sur une F-algèbre centrale simple donnée de degré impair sur une extension quadratique F de K sont isomorphes (sur K).*
- *Deux involutions de deuxième espèce sur une F-algèbre centrale simple donnée de degré pair sur une extension quadratique F de K sont isomorphes (sur K) si et seulement si elles ont même algèbre discriminante.*

Se référer à [KMRT] II.10. pour ce qui concerne l'algèbre discriminante d'une involution de deuxième espèce de degré pair. C'est une algèbre à involution définie grâce aux algèbres $\lambda^k A$ des λ-produits. Ce type d'invariant n'a à ma connaissance pas été exploré pour les antiautomorphismes de seconde espèce.

Lewis et Tignol donnent également un critère pour les corps formellements réels ([LT2], th. B) : sous l'hypothèse supplémentaire de "Strong Approximation Property" ou de "Effective Diagonalization property", et en remplaçant dans l'énoncé précédent $\operatorname{cd} K \leq 2$ par $\operatorname{vcd} K \leq 2$ et $I^3(K) = 0$ par $I^3(K)$ sans torsion, ils montrent que deux involutions ont seulement besoin d'avoir en plus des conditions du 4.8 même signature pour être isomorphes.

Ces résultats généralisent les résultats de classification obtenus par Elman et Lam [EL] pour les formes quadratiques et par Bayer-Fluckiger et Parimala (dans [BP1] et [BP2]) pour les formes hermitiennes sur une algèbre centrale simple à involution.

Un des résultats à rechercher pour les antiautomorphismes est une classification du type de celles-là, ne serait-ce que pour la première espèce. Or pour montrer 4.8, les auteurs utilisent les travaux de Dejaiffe sur la somme orthogonale, en particulier la simplification par des formes hermitiennes hyperboliques, ainsi que la structure des algèbres de Clifford. Autant d'arguments qui pour l'instant font défaut, les cas des formes bilinéaires ou sesquilinéaires me semblant possibles à attaquer maintenant.

4.5. **En petit degré.**

Soit A une algèbre centrale simple de degré 2, c'est-à-dire soit une algèbre de matrices 2×2, soit une algèbre de quaternions. Les involutions symplectiques sur de telles algèbres sont clairement toutes isomorphes. Classifier les involutions orthogonales sur A revient soit à classifier les formes quadratiques à similitude près, soit à classifier les $\sigma = \operatorname{Int} u \circ \tau$, où τ est l'involution standard sur l'algèbre de quaternions A et u est un élément symétrique ou antisymétrique pour A. On obtient assez facilement le résultat suivant :

Proposition 4.9.
Les involutions orthogonales sur une algèbre centrale simple de degré 2 sont classifiées par leur discriminant.

Dans le cas déployé, les calculs faits dans [C4] en utilisant les formes possibles des aymétries données par 1.3, montrent (au cas par cas) que si $a_b \neq 1$, alors a_b détermine complètement la forme bilinéaire b à un facteur multiplicatif près dans $K^\star$.

Dans le cas quaternionique non involutif, en choisissant comme élément de base sur K le quaternion $i = \dfrac{1-a_\sigma}{1+a_\sigma}$, on montre dans [C4] que σ est isomorphe à $\mathrm{Int}(i+1)\circ\tau$.

La proposition ci-dessus se complète donc par :

Proposition 4.10 (C.)**.**
Les antiautomorphismes sur une algèbre centrale simple de degré 2 *qui ne sont pas des involutions orthogonales sont classifiés par leur asymétrie.*

Supposons maintenant que A est de degré 3. Alors elle est déployée. Il n'y a pas d'involution symplectique et d'après [AE], les involutions quadratiques sont classifiées par leur algèbre de Clifford (paire).

En utilisant toujours 1.3, il est possible de décrire explicitement toutes les asymétries possibles pour des formes bilinéaires non dégénérées en dimension 3. Il est alors possible, suivant la multiplicité des valeurs propres 1 et -1 dans a_b, de décrire b comme une somme orthogonale de formes bilinéaires de dimension plus petite et ainsi de montrer grâce à la proposition précédente :

Proposition 4.11 (C.)**.**
Les antiautomorphismes sur une algèbre centrale simple de degré 3 *qui ne sont pas involutifs sont classifiés par leur asymétrie et leur discriminant.*

Dans le cas où A est de degré 4 et déployée, les mêmes techniques permettent de reconstituer le type de matrice de la forme b à partir des valeurs possibles de son asymétrie a_b. Il est alors simple de calculer son discriminant. Ces calculs au cas par cas fastidieux montrent que l'asymétrie et le discriminant ne suffisent plus à déterminer la classe d'isomorphie de σ_b.

Les calculs de l'algèbre de Clifford de b à partir de la matrice trouvée permettent dans plusieurs cas de montrer que cette algèbre est bien de degré 8, mais ne me permettent pas pour l'instant de reconnaître ces algèbres (produit croisés ?) ni de voir si elles déterminent ou non la forme de départ.

Notons que les calculs que j'ai tentés utilisent autant que possible la somme orthogonale mais qu'il serait intéressant à partir du degré 4 de tenter d'obtenir des résultats sur la décomposabilité d'une algèbre à antiautomorphisme en produit tensoriel d'algèbres à antiautomorphisme en fonction de leurs invariants. On pourrait en particulier essayer de généraliser le résultat suivant du à Knus, Parimala et Sridharan :

Théorème 4.12 ([KPS])**.**
Une algèbre à involution orthogonale de degré 4 *se décompose en produit de deux algèbres à involution orthogonales si et seulement si son discriminant est trivial.*

Références

[AE] J. Arason, R. Elman, *Powers of the fundamental ideal in the Witt ring*, J. Algebra **239** (2001) no. 1, pp 150–160.

[B] H. Bass, *Algebraic K-Theory*, Benjamin, New York (1968).

[BP1] E. Bayer-Fluckiger, R. Parimala, *Galois cohomology of the classical groups over fields of cohomological dimension* ≤ 2, Invent. Math. **122** (1995), pp 195–229.

[BP2] E. Bayer-Fluckiger, R. Parimala, *Classical groups and Hasse principle*, Annals of Math. **147** (1998), pp 651–693.

[CH] C. Chevalley, *On algebraic group varieties*, Journal of the Math. Society of Japan **6** (1954), pp 303–324.

[CTS] J.-L. Colliot-Thélène , J.-J. Sansuc , *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **10** (1977), pp 175–229.

[C1] A. Cortella, *Le principe de Hasse pour les similitudes de formes quadratiques et hermitiennes*, Publications mathématiques de Besançon - Théorie des nombres (1993).

[C2] A. Cortella, *Un contre-exemple au principe de Hasse pour les similitudes de formes bilinéaires*, Note aux C.R.Acad.Sci.Paris **317** (1993), série I, pp 707–710 .

[C3] A. Cortella, *The Hasse principle for similarities of bilinear forms*, St.-Petersburg Math. Journal. **9** (1998) no. 4, pp 743–762.

[C4] A. Cortella, *Algèbre de Clifford d'un antiautomorphisme*, Journal of Algebra **314** (2007) no. 1, pp 252–266.

[CG] A. Cortella et G. Gras, *Interprétation et calcul du groupe de défaut d'un principe de Hasse*, Mathematische Nachrichten **188** (1995), pp 109-140.

[CK] A. Cortella et B. Kunyavskiĭ, *Rationality problem for generic tori in simple groups*, Journal of Algebra **225** (2000) , pp 771–793.

[CL] A. Cortella et D. Lewis, *Sesquilinear Morita equivalence and orthogonal sum for algebras with antiautomorphisms*, accepté à Communications in Algebra, 20p.

[CT1] A. Cortella et J.-P. Tignol, *Asymetry of anti-automorphisms of central simple algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra **167** (2002), pp 175–193.

[CT2] A. Cortella et J.-P. Tignol, *Skolem-Noether pour les endomorphismes sur un anneau principal*, Journal de théorie des nombres de Bordeaux **17** (2005) no. 2, pp 511–516.

[D] I. Dejaiffe, *Somme orthogonale d'algèbres à involution et algèbre de Clifford*, Communications in Algebra **26** (1998) no. 5, pp 1589–1612.

[Di] J. Dieudonné, *Sur les multiplicateurs de similitude*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **3** (1954), pp 398–408 (1955).

[DG] M. Demazure et A. Grothendieck, *Schémas en Groupes II* (SGA3, t. II), Lecture Notes in Math. **152** (1970), Springer, Berlin–Heidelberg–New York.

[EL] R. Elman, T.Y. Lam, *Classification theorems for quadratic forms over fields*, Comment. Math. Helv. **49** (1974), pp 373–381.

[FME] A. Fröhlich, A.M. McEvett, *Forms over rings with involution*, Journal of Algebra **12** (1969), pp 79–104.

[G] Ph. Gille, *Examples of non-rational varieties of adjoint groups*, Journal of Algebra **193** (1987), pp 728–747.

[J] N. Jacobson,*Clifford algebra for algebras with involution of type D*, Journal of Algebra **1** (1964), pp 288–300.

[Ka] I. Kaplansky, *Infinite abelian groups*, Univ. Michigan Press (1954) ; rev. ed. 1969.

[Kn] M.-A. Knus, *Quadratic and Hermitian forms over rings*, Grund. der math. Wissenschaften **294** (1991), Springer-Verlag.

[KMRT] M.-A. Knus, A.S. Merkurjev, M. Rost and J.-P. Tignol, *The Book of Involutions,* Coll. Pub. **44** (1998), Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[KPS] M.-A. Knus, Parimala, and Sridharan. *On the discriminant of an involution*, Contact Franco-Belge en Algèbre (Antwerp, 1990). Bull. Soc. Math. Belg. Sr. A **43** (1991) no. 1-2, pp 89–98.

[Ku] B. Kunyavskiĭ *Three-dimensional algebraic tori*, Selecta Math. Sov. **21** (1990), pp 1–21.

[LB] L. Le Bruyn, *Generic norm one tori*, Nieuw Archief voor Wisk. (4) **13** (1995), pp 401–407.

[L1] D. Lewis, *Involutions and anti-automorphisms of central simple algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra **182** (2003), pp 253–261.

[L2] D. Lewis, *Anti-automorphisms of the second kind*, Contemporary Math. **344** (2004), pp 257–264.

[L3] D. Lewis, *Involutions and anti-automorphisms algebras*, Bull. London Math. Soc. **38** (2006) no. 4, pp 529–545.

[LT1] D. Lewis and J.-P. Tignol, *On the signature of an involution*, Arch. Math. (Basel) **60** (1993), no. 2, pp 128135.

[LT2] D. Lewis and J.-P. Tignol, *Classification theorems for central simple algebras with involution*, With an appendix by R. Parimala. Manuscripta Math. **100** (1999) no. 3, pp 259–276.

[Ma] J. Martinet, *Modules sur l'algèbre du groupe quaternionien*,Ann. Sci. ENS **4** (1971), pp 399–408.

[M1] A.S Merkurjev, *Generic element in SK_1 for simple algebras*, K-theory **7** (1993), pp 1–3.

[M2] A.S Merkurjev, *R-equivalence and rationality problems for semisimple adjoint classical groups*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **84** (1996), pp 189–213.

[On] T. Ono, *Arithmetic of orthogonal groups*, Journal of the Math. Society of Japan **7** (1955), pp 79–91.

[P] V.P. Platonov, Algebraic groups and reduced K-theory, Proc. Internat. Congress Math. Helsinki 1978, Helsinki **1** (1980), pp 311–317.

[PR] V.P. Platonov et A.S. Rapinchuck, *Algebraic groups and number theory.* Moscow Nakaua Mais Editorial Board for Pysical and Math. Litterature (1990), traduction en anglais : Pure and Applied Mathematics, **139** (1994), Academic Press, Inc., Boston, MA.

[Q1] A. Quéguiner *Signature des involutions de deuxième espèce*, Arch. Math. (Basel) **65** (1995), no. 5, pp 408–412.

[OVV] D. Orlov, A. Vishik, V. Voevodsky, *An exact sequence for K /2 with applications to quadratic forms.*, Ann. of Math. (2) **165** (2007), no. 1, pp 1–13.

[Q2] A. Quéguiner-Mathieu *Invariants cohomologiques : des formes quadratiques aux algèbres involution*, Publ. Math. UFR Sci. Tech. Besanon, Univ. Franche-Comté, Besan con (2002), 12pp.

[R] C. Riehm, *The equivalence of bilinear forms,* Journal of Algebra **31** (1974), pp 45–66.

[RSF] C. Riehm, M.A. Shrader-Frechette *The equivalence of sesquilinear forms,* Journal of Algebra **42** (1976), pp 495–530.

[Sa1] D.J. Saltman, *Azumaya algebras with involution*, journal of algebra **52** (1978) no. 3, pp 526-539.

[Sa2] D.J. Saltman, *Generic Galois extensions and problems in field theory*, Adv. in Math. **43** (1982) no. 3, pp 250-283.

[San] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, Journal f. reine u. angew. Math. **327** (1981), pp 12–80.

[Se] J.-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne*, Lecture Notes in Math. **5** (1964), Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

[T] J. Tits, *Formes quadratiques, groupes orthogonaux, et algèbres de Clifford*, Invent. Math. **5** (1968), pp 19–41.

[Vi] A. Vishik, *Motives of quadrics with applications to the theory of quadratic forms. Geometric methods in the algebraic theory of quadratic forms.* Lecture Notes in Math., **1835** (2004), Springer, Berlin, pp 25–101.

[Vo1] V.E. Voskresenskiĭ, *Tores Algébriques*, Nauka, Moscou, 1977. (En Russe).

[Vo2] V.E. Voskresenskiĭ, *Sur les modules de Picard des modèles projectifs des tores algébriques*, II, Recherches sur la Théorie des Nombres, Saratov, 1978, pp 18–33. (Russe).

[Vo3] V.E. Voskresenskiĭ, *Toroidal Fano varieties and root systems*, Math. USSR Izv. **24** (1984), pp 221–244.

[Vo4] V.E. Voskresenskiĭ, *Maximal tori without affect in semisimple algebraic groups*, Math. Notes **44** (1988), pp 651–655.

[Vo5] V.E. Voskresenskiĭ. *A criterion for the rationality of an algebraic torus*, (Russian) Vestn. Samar. Gos. Univ. Estestvennonauchn. Ser. **9** (2006), pp 7–13.

[VK] V.E. Voskresenskii et A.A. Klyachko, *Toroidal Fano varieties and root systems*, Math. USSR Izv. **24** (1984), pp 221–244.

[W] C.T.C. Wall, *On the classification of Hermitian forms. II Semi-simple rings*, Inventiones Math. **18** (1972), pp 119–141.

[Wa] W.C. Waterhouse, *A non-symmetric Hasse-Minkovski theorem*, American Journal of Math. **99** (1977), pp 755–759.

[Wi] J. Williamson, *On the algebraic problem concerning the normal form of linear dynamical systems*, American Journal of Math. **58** (1936), pp 141–163.

Anne Cortella, Laboratoire de Mathématiques de Besançon, UMR CNRS 6623, Université de Franche-Comté, 16 Route de Gray, 25030 Besançon Cedex, France.

E-mail address: anne.cortella@univ-fcomte.fr